

1 以下の にあてはまる答えを求めよ。

(1) $x = \frac{3}{\sqrt{7}+1}$, $y = -\frac{\sqrt{7}+1}{2}$ とする。 x の分母を有理化すると, $x = \text{$ である。

また, $x+y+2xy$, x^2+y^2 を整数で表すと, それぞれ $x+y+2xy = \text{$,

$x^2+y^2 = \text{$ である。

(2) $f(x) = 2(\log_2 x)^2 + \log_2 \frac{x}{2}$ とし, $\log_2 x = t$ とおく。 $f(x)$ を t で表すと

$f(x) = \text{$ であり, $\frac{1}{64} \leq x \leq 8$ のとき, t のとり得る値の範囲は $\text{$ である。

また, $\frac{1}{64} \leq x \leq 8$ のとき, $f(x)$ の最大値は $\text{$ である。

(3) $\triangle ABC$ において, $AB=13$, $BC=15$, $\cos \angle ACB = \frac{3}{5}$ であり, $AB < AC$ である

とする。このとき, AC の長さは $\text{$ である。また, $\triangle ABC$ の外接円の半径を R ,

内接円の半径を r とするとき, $R = \text{$, $r = \text{$ である。

(4) サイコロを 4 回投げるとき, 出る目を順に x, y, z, w とおく。 $xyzw$ が奇数である

確率は $\text{$, $xyzw$ が 3 で割り切れる確率は $\text{$ である。また,

$(x-y)(y-z)(z-w) = 0$ となる確率は $\text{$ である。

(5) (i) 次の条件

$$a_1 = 7, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 3 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって, 数列 $\{a_n\}$ を定める。このとき, $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \text{$ である。

(ii) 次の条件

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + 3n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって, 数列 $\{b_n\}$ を定める。さらに, 定数 p, q に対して $c_n = b_n + pn + q$ によって

数列 $\{c_n\}$ を定める。数列 $\{c_n\}$ が $c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たすとき,

$p = \text{$, $q = \text{$ である。これより, $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \text{$ である。

(6) m, n は定数とし, 関数 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx$ を考える。 $f(x)$ が $x = -m$ で

極値 m^2 をとるとするとき, $m = \text{$, $n = \text{$ であり, $f(x)$ の極小値は $\text{$

である。

2 a は $-2 < a < 4$ を満たす定数とし、2つの関数

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = -\left(1 + \frac{1}{2}a\right)x^2 + \left(2 - \frac{1}{2}a\right)x + a$$

を考える。点 $A(1, 1)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を l とし、曲線 $y = f(x)$ と l の共有点のうち A でない方を B とする。また、曲線 $y = f(x)$ と l で囲まれた図形の面積を S とする。

- (1) l の方程式および B の座標を求めよ。
- (2) S を求めよ。
- (3) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標を全て求めよ。
- (4) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれる2つの部分の面積が等しいとき、 a の値を求めよ。