麻布大学 2023 D 日程

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $\log_4\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$

(2) 実数 a, b, c について

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b} \quad (a+b+c \neq 0)$$

が成り立つとき，この式の値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3) $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}=\boxed{\text{オカキ}}$ である。

(4) 正の約数の個数が 20 個である正の整数のうち，最小のものは $\boxed{\text{クケコ}}$ である。

(5) 10 羽のニワトリを A，B，C，D の 4 種類のゲージに入れる。1 羽も入らないゲージがあってよいとすると，入れ方は全部で $\boxed{\text{サシス}}$ 通りある。ただし，ニワトリは互いに区別をつけないものとする。

(6) k は正の整数で，3 次方程式 $x^3-21x+k=0$ は 3 つの異なる整数解をもつとする。このとき，$k=\boxed{\text{セソ}}$ であり，3 つの解のうち最小のものは $\boxed{\text{タチ}}$ である。

(7) 1 より大きい実数 x, y が $xy=256$ を満たすとき，関数 $(\log_2 x)^3+(\log_2 y)^2$ の最小値は $\boxed{\text{ツテ}}$ である。また，そのときの x, y の値は，$x=\boxed{\text{ト}}$，$y=\boxed{\text{ナニ}}$ である。

$\boxed{2}$ 正の数 a に対し，座標空間に A $(a,\ 0,\ 0)$，B $(0,\ a,\ 0)$，C $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を頂点とする $\triangle$ABC を考える。

(1) $\angle \mathrm{BCA}=\theta$ とおくと，$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{a^4+\boxed{\text{ネ}}}$ である。また，$\triangle$ABC の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\frac{\sqrt{a^4+\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

で与えられる。

(2) 頂点 C から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB との交点を D とする。$a=\sqrt[4]{\boxed{\text{ヒ}}}$ のとき辺 CD の長さは最小値 $\sqrt[4]{\boxed{\text{フ}}}$ をとる。さらに，このときの $S(a)$ の値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

(3) 座標空間の原点 O $(0,\ 0,\ 0)$ と $\triangle$ABC の各頂点 A，B，C で結んで得られる四面体 OABC の体積 $V(a)$ は，$V(a)=\dfrac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}a$ で与えられる。原点 O から $\triangle$ABC に下ろした垂線と $\triangle$ABC との交点を E とするとき，線分 OE の長さの最大値は $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\boxed{\text{ミ}}}}$ である。

(4) $a=1$ とし，xy 平面内に点 F $(1,\ 2,\ 0)$ をとる。点 P が線分 AB 上を動くとき，長さ CP$+$PF を最小とする P の座標は $\left(\boxed{\text{ム}}-\sqrt{\boxed{\text{メ}}},\ \boxed{\text{モヤ}}+\sqrt{\boxed{\text{ユ}}},\ 0\right)$ である。

$\boxed{3}$ ある離島で発生した甲虫 A について次の特性（★）がわかっている：

（★）「甲虫 A は深夜に増殖し，早朝の総数は前日の夕刻よりも 4 % 増加している。」

その離島では 9 月 1 日から甲虫 A の駆除が計画されている。駆除作業は昼間に行い，1 日当たり k 匹を駆除する。9 月 1 日での作業前の甲虫 A の総数を 5000 匹と仮定し，9 月 n 日 $(n \geqq 1)$ での作業前の総数を a_n 匹，作業後の総数を b_n 匹とする。ただし，以下の計算は駆除計画の概要をあらかじめ模擬実験するためのものであり，a_n，b_n が整数でない値をとることも許容する。

(1) $a_1 = \boxed{\text{ヨラリル}}$，$a_n = b_{n-1}R \quad (n \geqq 2)$ である。ここで，$R = \dfrac{\boxed{\text{レロ}}}{\boxed{\text{ワン}}}$ である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項は，

$$b_n = \left(a_1 - \boxed{\text{あい}}\,k\right)R^{n-1} + \boxed{\text{うえ}}\,k$$

(3) $R^{29} = 3.12$ とすると，9 月 30 日までに駆除が完了するためには，1 日当たり少なくとも $\boxed{\text{おかき}}$ 匹の甲虫 A を駆除する必要がある。ただし，$\boxed{\text{おかき}}$ は整数で答えること。

$\boxed{4}$ a，b，c は定数で，$a > 0$ とする。関数

$$f(x) = x^3 + 2ax^2 + 2x + 1,\quad g(x) = ax^2 + bx + c$$

が条件 $f(-1) = g(-1)$，$f(1) = g(1)$ を満たす。

(1) $b = \boxed{\text{く}}$，$c = a + \boxed{\text{け}}$，$f(x) - g(x) = \left(x - \boxed{\text{こ}}\right)\left(x + \boxed{\text{さ}}\right)(x + a)$ である。

(2) 座標平面上において 2 つの曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ が相異なる 3 点で交わるとき，C_1 と C_2 で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値は $\boxed{\text{し}}$ である。