北里大学 2023 前期

$\boxed{1}$ 以下の $\boxed{}$ に当てはまる答えを求めよ。

(1) a，b を実数として，2 次方程式 $x^2+2ax+b=0$ の 2 つの解を α，β とする。$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ を a，b を用いて表すと，$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{ア}}$ であり，$\alpha^3+\beta^3=\boxed{\text{イ}}$ である。さらに，$a>0$，$\alpha-\beta=2$ であり，方程式 $x^2+2bx+4a^2+1=0$ が重解をもつとすると，a，b の値は $a=\boxed{\text{ウ}}$，$b=\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 不等式 $2x+y-2\leqq 0$，$x-y+1\geqq 0$，$x+2y-1\geqq 0$ の表す領域を D とする。点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y$ の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ であり，x^2+y^2 の最大値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CA}=4$ である三角形 ABC がある。$\cos A=\boxed{\text{キ}}$ であり，三角形 ABC の外接円の半径は $\boxed{\text{ク}}$ である。また，三角形 ABC の垂心を O とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\boxed{\text{ケ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\boxed{\text{コ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

(4) $0\leqq x\leqq\pi$ として，$t=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ とする。このとき t のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{サ}}$ である。$f(x)=2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos x+1$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とする。$f(x)$ を t を用いて表すと $f(x)=\boxed{\text{シ}}$ となり，$f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{ス}}$ である。また，方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解がちょうど 2 個存在するとき，定数 k のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(5) 一般項が $a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ と表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和を求めると $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\boxed{\text{ソ}}$ である。$b_1=0$，$b_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}b_n+2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える。$c_n=\dfrac{b_n}{n(n+1)}$ とおくとき，c_{n+1} を c_n と n を用いて表すと $c_{n+1}=\boxed{\text{タ}}$ となる。数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{\text{チ}}$ である。

(6) $x+y+z=15$ を満たす正の整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ の総数は $\boxed{\text{ツ}}$ である。
$x+y+z=15$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ を満たす整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ の総数は $\boxed{\text{テ}}$ である。
$x+y+z\leqq 15$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ を満たす整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ の総数は $\boxed{\text{ト}}$ である。

$\boxed{2}$ a は $0<a<1$ を満たす定数とし，関数 $f(x)=x^2+2ax-\dfrac{2}{3}a^2+\dfrac{11}{12}a$ を考える。

O を原点とし，点 A $(a,\ a^2)$ をとる。放物線 C： $y=f(x)$ 上を点 P が動くとき，三角形 OAP の面積の最小値を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 放物線 C の頂点の座標を a を用いて表せ。

(2) 放物線 C 上の点 Q $(q,\ f(q))$ における接線の傾きが a であるとき，q を a を用いて表せ。

(3) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(4) $S(a)$ の値が最大となるときの a の値と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。