

2020 年 酪農学園大 第Ⅱ期

1 次の各問いに答えよ。

- (1) $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^2z + yz^2 + z^2x + 2zx^2 + 4xyz$ を因数分解せよ。
- (2) 400 以下の自然数の中に、7 または 19 の倍数で、35 で割り切れないものはいくつあるか。
- (3) A, B, C, D, E, F, G の 7 人が 1 列に並ぶとき、A, B, C の 3 人が、BDAECFG のように 1 人おきに並ぶ順列は、全部で何通りあるか。
- (4) xy 平面上の 3 点 $A(-4, -5)$, $B(6, 0)$, $C(-2, 3)$ について、点 B と直線 CA の距離 h , $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。
- (5) $p = \frac{1}{100}$, $q = \log_p 2$ であるとき、 10^q の値を求めよ。
- (6) 数列 $\frac{1}{2}$, $\frac{1+2}{4}$, $\frac{1+2+3}{6}$, $\frac{1+2+3+4}{8}$, ... の一般項を求めよ。

2 連立不等式

$$\begin{cases} y(4y - |x^2 - 10| + 6) \leq 0 & \dots \textcircled{1} \\ 4y + x^2 - 2x - 8 \leq 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

の表す領域を D とする。次の各問いに答えよ。

- (1) D を図示せよ。
- (2) D の面積を求めよ。

3 OA=2, OB=3, $\angle AOB=60^\circ$ である $\triangle OAB$ の垂心を H とする。直線 AH と辺 OB の交点を P, 直線 OH と辺 AB の交点を Q とするとき,

- (I) \overrightarrow{OH} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を用いて表した式
 (II) 四角形 BPHQ の面積

を求めたい。下記の文中の の中に適切な式または値を入れよ。

『(I) 実数 $k(0 < k < 1)$ を用いて $AH : HP = k : (1 - k)$ とおく。H は線分 AP 上にあるから,

\overrightarrow{OH} を k , \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OP} を用いて表すことができる。このベクトル方程式に

$\overrightarrow{OP} = \text{(1)} \overrightarrow{OB}$ を代入すると, \overrightarrow{OH} を k , \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を用いて表した式

$$\overrightarrow{OH} = \text{(2)} \overrightarrow{OA} + \text{(3)} \overrightarrow{OB} \quad \dots \text{①}$$

を得る。H は垂心であるから, \overrightarrow{OH} と \overrightarrow{AB} は次の等式を満たす。

$$\text{(4)} \quad \dots \text{②}$$

①を②に代入すると, k についての方程式が得られ, k の値が

$$k = \text{(5)} \quad \dots \text{③}$$

と求まる。よって, ①と③より

$$\overrightarrow{OH} = \text{(6)} \overrightarrow{OA} + \text{(7)} \overrightarrow{OB} \quad \dots \text{④}$$

となる。

(II) 四角形 BPHQ の面積を S とおく。 S は 2 つの三角形の面積の差

$$S = \triangle OQB - \triangle OPH \quad \dots \text{⑤}$$

から求めることができる。 $\triangle OQB$ と $\triangle OPH$ は相似である。正の定数 m を用いると, これらの面積の間には $\triangle OQB = m \times \triangle OPH$ が成り立つから, ⑤を m を用いて表すと

$$S = \text{(8)} \times \triangle OPH \quad \dots \text{⑥}$$

となる。 m の値は,

$$m = \text{(9)}$$

と求まり, $\triangle OPH$ の面積は,

$$\triangle OPH = \text{(10)}$$

と求める。よって, これらを⑥に代入すると,

$$S = \text{(11)}$$

を得る。』