

1 12本のくじの中に、当たりくじが5本ある。このくじをA, Bの2人がこの順に1本ずつ1回だけ引くとき、次の確率を求めよ。ただし、引いたくじはもとに戻さないものとする。

- (1) Aがはずれる確率
- (2) Aが当たり、Bがはずれる確率
- (3) A, Bのくじの結果が同じである確率

2 関数 $y = \log_2 2x$ のグラフを C_1 、関数 $y = \log_2(x+2)$ のグラフを C_2 とする。 a を正の実数とし、直線 $x = a$ と C_1 、 C_2 の共有点をそれぞれ P, Q とする。また、 b を実数とし、直線 $y = b$ と C_1 、 C_2 の共有点をそれぞれ R, S とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) グラフ C_1 と C_2 をかき、 C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ。
- (2) 線分 PQ の長さが $\frac{1}{2}$ であるとき、 a の値を求めよ。
- (3) 線分 RS の長さが $\frac{1}{2}$ であるとき、 b の値を求めよ。
- (4) 線分 RS の中点の x 座標が 5 であるとき、線分 RS の長さを求めよ。

3 関数 $y = ax^3 + x$ ($0 < x < 2$) について、次の問いに答えよ。ただし、 a は定数とする。

- (1) $a = -1$ のとき、この関数のグラフをかけ。
- (2) この関数が極値をもたないような a の値の範囲を求めよ。
- (3) この関数の最大値が $\frac{1}{3}$ であるとき、 a の値を求めよ。また、最大値をとるときの x の値を求めよ。

4 x に関する3次式

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

を考える。ただし、 a は0でない整数、 b, c, d は整数である。集合 A, B, C を

$$A = \{P(n) \mid n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}\} = \{P(0), P(1), P(2), \dots\}$$

$$B = \{m \mid m \text{ は負の整数}\}$$

$$C = \{p \mid p \text{ は素数}\}$$

と定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a = 1, b = -6, c = 11, d = -6$ とするとき、 $P(3)$ を求めよ。
- (2) (1) のとき、 $A \cap B$ の要素の個数を求めよ。
- (3) $P(1) = P(2) = P(3) = -21$ が成り立っているとする。このとき、 $A \cap C$ が空集合にならないような a, b, c, d の4つの組 (a, b, c, d) をすべて求めよ。

5 3進法で表したときの桁数が6以下である0以上の整数

$$0_{(3)}, 1_{(3)}, 2_{(3)}, 10_{(3)}, 11_{(3)}, \dots, 222221_{(3)}, 222222_{(3)}$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 上のように表される整数の個数を求めよ。
- (2) 3進法で表したときに5桁以下であり、各位の数字がすべて1またはすべて2である整数の個数を求めよ。
- (3) 3進法で表したときに5桁以下であり、各位の数字が1か2である整数の個数を求めよ。
- (4) 3進法で表したときに6桁以下であり、0, 1, 2のすべての数字が出現する整数の個数を求めよ。