麻布大 2019 第 1 期

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $x+y+z=6$，$xy+yz+zx=4$，$xyz=3$ のとき $x^3+y^3+z^3=\boxed{\text{アイウ}}$ である。

(2) $\sqrt{11(x+22)}$ が整数となるような 3 桁の自然数 x のうち最も大きい数は，$\boxed{\text{エオカ}}$ である。

(3) 18^{35} は $\boxed{\text{キク}}$ 桁の数である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として計算せよ。

(4) $\dfrac{104}{51}$ と $\dfrac{156}{85}$ のどちらにかけても自然数となるような分数のうち，最も小さいものは $\dfrac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

(5) 2 直線 $x-2y+1=0$，$2x+y-3=0$ のなす角の 2 等分線は，$x+\boxed{\text{セ}}y-\boxed{\text{ソ}}=0$ または $\boxed{\text{タ}}x-y-\boxed{\text{チ}}=0$ である。

(6) $a_1=3$，$a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\boxed{\text{ツ}}^n\left(\boxed{\text{テ}}^n-\boxed{\text{ト}}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

(7) 同型のガラス板を 24 枚重ね，それに光を照射したところ，ガラスを透過したあとの光の強さは入射前の $\dfrac{1}{8}$ となった。透過後の光の強さを入射前の強さの $\dfrac{1}{2}$ にするために要するガラス板の枚数は $\boxed{\text{ナ}}$ 枚である。ただし，透過後の光の強さはガラス板が 1 枚増えるごとに一定の割合で減少するものとする。

(8) 複素数 $\dfrac{3}{1+2i}$ が，実数 a，b を係数に持つ 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解であるとき $a=\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$，$b=\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。ここで，i は虚数単位である。

(9) $0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。$\tan\theta=\sqrt{2}$ のとき $\dfrac{\cos^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\boxed{\text{ヒ}}-\boxed{\text{フ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

[1] $\angle A=75^\circ$，$BC=1$ であり，$\angle B$ と $\angle C$ の比が $\angle B:\angle C=4:3$ であるような三角形 ABC がある。

(1) $\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{\boxed{ホ}}+\sqrt{\boxed{マ}}}{\boxed{ミ}}$ である。ただし，$\boxed{ホ}<\boxed{マ}$ とする。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径 R は，$R=\dfrac{\sqrt{\boxed{ム}}-\sqrt{\boxed{メ}}}{\boxed{モ}}$ である。

(3) $AB=\sqrt{\boxed{ヤ}}-\boxed{ユ}$，$AC=\dfrac{\boxed{ヨ}\sqrt{\boxed{ラ}}-\sqrt{\boxed{リ}}}{2}$ である。また，頂点 A から BC へ引いた中線の長さは，$\dfrac{\sqrt{\boxed{ルレ}-\boxed{ロワ}\sqrt{\boxed{ン}}}}{2}$ である。

[2] 放物線 $y=x^2-2x+1$ と直線 $y=mx$ が異なる 2 点 P，Q で交わるための m の必要十分条件は，$m<\boxed{あい}$ または $m>\boxed{う}$ である。このとき線分 PQ の中点の軌跡は，方程式

$$y=\boxed{え}x\left(x-\boxed{お}\right)$$

で表される曲線の $x<-\boxed{か}$ または $x>\boxed{き}$ の部分である。

$\boxed{3}$ 実数 p，q，r を係数にもつ 3 次関数 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ について定積分

$$I(p,\ q,\ r)=\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$$

とする。

(1) 任意の p，q，r に対して

$$\frac{1}{2}I(p,\ q,\ r)=\int_0^1(px^2+r)^2dx+\frac{1}{3}\left(q+\frac{\boxed{く}}{\boxed{け}}\right)^2+\frac{4}{\boxed{こさし}}$$

である。

したがって，$I(p,\ q,\ r)$ は $p=\boxed{す}$，$q=\dfrac{\boxed{せそ}}{\boxed{た}}$，$r=\boxed{ち}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{つ}}{\boxed{てとな}}$ をとる。

(2) p，q，r が $I(p,\ q,\ r)$ の最小値を与えるとき，任意の 2 次関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ に対して $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=\boxed{に}$ である。

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ。

[1] サイコロを100回投げ，そのうち丁度 n 回だけ6の目が出る確率を p_n とする。

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}-1=\frac{\boxed{ぬね}-\boxed{の}n}{\boxed{は}(n+1)}$$

だから $p_n<p_{n+1}$ が成り立つような n の最大値は $\boxed{ひふ}$ であり，$p_n>p_{n+1}$ が成り立つような n の最小値は $\boxed{へほ}$ である。よって，$n=\boxed{まみ}$ のとき p_n が最大となる。

[2] 外部から中身が見えない箱の中に，白球が15個，黒球が n 個入っている。ここで n は自然数である。この箱の中から無作為に2個の球を同時に取り出す試行を考える。白球と黒球がそれぞれ1個ずつ取り出される確率を q_n とすると

$$q_n=\frac{\boxed{むめ}n}{(\boxed{もや}+n)(\boxed{ゆよ}+n)} \qquad (\boxed{もや}<\boxed{ゆよ})$$

であり，$n=\boxed{らり}$ または $n=\boxed{るれ}$ のとき q_n は最大値 $\dfrac{\boxed{ろわ}}{\boxed{んが}}$ をとる。

ただし，$\boxed{らり}<\boxed{るれ}$ とする。